Heron 三角形的构造及性质研究

华南师范大学附属中学　霍泽恩

指导教师　郝保国

摘要： 本文主要是采用构造的方法, 构造了一般 *Heron* 三角形、倍角 *Heron* 三角形、角平分线为有理数的 *Heron* 三角形以及 *Heron* 四边形. 每次构造都给出了具体详细的过程, 思维清晰, 有迹可寻. 利用高中数学知识推导了垂足三角及其伴随三角形、切点三角形可成为 *Heron* 三角形的条件, 以及倍角 *Heron* 三角形与 *Heron* 四边形边的通式. 利用高中数学与初等数论的知识, 探究了角平分线为有理数的 *Heron* 三角形与至今未解决的 *PSTP*（完全平方三角形）问题的联系, 也比较全面地研究了三边成等差数列的 *Heron* 三角形的各种结论. 最后利用本原勾股三角形的知识和解不定方程组, 解决了完全长方体中一类比较特殊的问题.

This paper studies the construction of general Heron triangles, Heron triangles with multiple angle, Heron triangles with rational angle bisectors, and Heron quadrilaterals. All constructions in this paper have rigorous proofs and easy-to-follow steps. Using high school mathematics, we find the conditions needed for a pedal triangle and its accompanying triangle, and the triangle through the point of tangency to be Heron triangles. The formulas for constructing Heron triangles with multiple angle and Heron quadrilaterals are found as well. Using high school mathematics and elementary number theory, we study the relationship between Heron triangles with rational angle bisectors and the unsolved PSTP problem (Perfect Square Triangular Problem). We also study Heron triangles whose sides form arithmetic progressions. Using primitive Pythagorean Triangle and a system of diophantine equations, we solve a special kind of problem in the Perfect Cuboid Problem.

关键词：构造、 研究、*Heron* 三角形、*Heron* 四面体、完全平方三角形、完全长方体.

一.引言与预备知识

三边为整数, 面积也为整数的三角形叫 *Heron* 三角形. 老师在数学选修课上对我们讲, *Heron* 三角形研究由来已久, 数学历史上, 大师欧拉研究过, 大师高斯构造了外接圆半径为整数的 *Heron* 三角形. 近代特别是近三十年, 国内外数学界对 *Heron* 三角形的研究又热了起来.

研究 *Heron* 三角形有时要用到初等数论的知识, 因我原是初中奥校的学生, 老师希望我利用课余研究. 我接受老师的任务以后, 阅读了大量的相关书籍和文章. 沈康身老师的书《数学的魅力》, 杨世明老师的书《三角形趣谈》, 盛立人与严镇军老师的书《从勾股定理谈起》, 讲述了 *Heron* 三角形的前世今生及研究的现状, 使我受益匪浅. 山东济宁教育学院的朱道勋

老师在文[1]中，讨论了 *Heron* 三角形的若干重要性质；天津教育学院的边欣与李忠民老师在文[2]中，证明了 *Heron* 三角形系列新的结论；华东石油大学孙延照老师在文[3]中，研究了某些特殊 *Heron* 三角形的共同之处； 陕西镇安县中的曾丕刚老师在文[4]中，研究了内切圆半径为整数的 *Heron* 三角形；四川永川的姚勇老师在文[5]中,研究了周长是面积 k 倍的 *Heron* 三角形. 这些文章都对我的启发很大.

因为研究 *Heron* 三角形的人多，文章质量也高，我只能采取见缝插针、另辟溪径的方法，利用近一年的课余时间探究得到了一些的比较满意的结论，现从以下几个方面，择其主要结果来介绍我的研究.为了行文的需要，先介绍一些预备知识和文章中的某些约定：

1. a, b, c, p, S, r, R 分别表示三角形三边，半周长，面积，内切圆半径，外接圆半径. a, b, c 所对角分别是 A, B, C.

(1) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

(2) $\dfrac{a}{sinA}=\dfrac{b}{sinB}=\dfrac{c}{sinC}=2R$

(3) $a^2=b^2+c^2-2bccosA \Rightarrow cosA=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

(4) $S=rp$

2. 三边为整数的三角形称为勾股三角形，三边互素的勾股三角形称为本原勾股三角形. 本原勾股三角形两直角边一奇一偶，因此本原勾股三角形必为 *Heron* 三角形. 本原勾股三角形三边可表示为：

$$a=2st,\ b=s^2-t^2,\ c=s^2+t^2,\ s,t\in N^+,\ (s,t)=1,\ 2|\,st.$$

3.三边互素的 *Heron* 三角形称为本原 *Heron* 三角形. 本原 *Heron* 三角形三边必是两奇一偶.

4. *Heron* 三角形中, $r, R, sinA, cosA, tanA, tan\dfrac{A}{2}$ 均为有理数.

5. *Heron* 三角形的最短边长是 3，面积是 6 的倍数.

6. 存在这样的圆：它上面有这样的 $n(n\geq 3)$ 个点，以其中任三个点为顶点的三角形都是海伦三角形，并且以任三个点为顶点的三角形的角平分线也是整数.

二．Heron 三角形的构造

说到研究 *Heron* 三角形，寻找或者构造 *Heron* 三角形是很多研究者一直都在做的事情. 虽然目前还没有找到一种通式，可以包含所有的 *Heron* 三角形，但研究者从不同角度出发，采用不同的方法，都得到了一些好的结果. 湖北大学的郑美玉、空军雷达学院的姚兆栋、四川龙溪

中学吴波等几位老师的研究最为突出. 不过, 有些研究者的构造来得突然, 缺少过程, 让人不好理解. 我利用本原勾股三角形与余弦定理, 构造出下面四种类型的 *Heron* 三角形.

探究 1. **构造△*ABC*，使三边长 *a, b, c* 与面积 *S* 都是正整数**.

解： 在△*ABC* 中, 由余弦定理有

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

令 $\cos A = \dfrac{p}{q}$, 其中$(p, q) = 1$, 且 $q > |p|$, 则

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow \quad qa^2 = qb^2 + qc^2 - 2bcp$$

$$\Rightarrow \quad (qa)^2 = (qb)^2 + (qc)^2 - 2bcpq = (qb - pc)^2 + (q^2 - p^2)c^2$$

令 $m^2 = q^2 - p^2$ ……①

有 $(qa)^2 = (qb - pc)^2 + (mc)^2$

令 $\begin{cases} qa = x^2 + y^2 \\ qb - pc = 2xy \\ mc = x^2 - y^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x^2 + y^2}{q} \\ b = \dfrac{p(x^2 - y^2) + 2mxy}{mq} \\ c = \dfrac{x^2 - y^2}{m} \end{cases} \quad \text{……②}$$

或者 $\begin{cases} qa = x^2 + y^2 \\ qb - pc = x^2 - y^2 \\ mc = 2xy \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{x^2 + y^2}{q} \\ b = \dfrac{m(x^2 - y^2) + 2pxy}{mq} \\ c = \dfrac{2xy}{m} \end{cases} \quad \text{……③}$$

其中$x, y \in N^+, x > y, \ (x, y) = 1, 2 | xy$.

由①有, $q^2 = m^2 + p^2$, 不妨设 $q = s^2 + t^2, p = s^2 - t^2, m = 2st$, 或者$q = s^2 + t^2, m= s^2 - t^2, p = 2st$. 其中$s, t \in N^+, s > t, (s, t) = 1, 2 \mid st$.

由②有

$$\begin{cases} a = \dfrac{x^2 + y^2}{s^2 + t^2} \\ b = \dfrac{(s^2 - t^2)(x^2 - y^2) + 4stxy}{2st(s^2 + t^2)} \\ c = \dfrac{x^2 - y^2}{2st} \end{cases} \quad \cdots\cdots④$$

或者$$\begin{cases} a = \dfrac{x^2 + y^2}{s^2 + t^2} \\ b = \dfrac{2st(x^2 - y^2) + 2(s^2 - t^2)xy}{(s^2 - t^2)(s^2 + t^2)} \\ c = \dfrac{x^2 - y^2}{s^2 - t^2} \end{cases} \quad \cdots\cdots⑤$$

由③有$$\begin{cases} a = \dfrac{x^2 + y^2}{s^2 + t^2} \\ b = \dfrac{st(x^2 - y^2) + (s^2 - t^2)xy}{st(s^2 + t^2)} \\ c = \dfrac{xy}{st} \end{cases} \quad \cdots\cdots⑥$$

或者$$\begin{cases} a = \dfrac{x^2 + y^2}{s^2 + t^2} \\ b = \dfrac{(s^2 - t^2)(x^2 - y^2) + 4stxy}{(s^2 - t^2)(s^2 + t^2)} \\ c = \dfrac{2xy}{s^2 - t^2} \end{cases} \quad \cdots\cdots⑦$$

以上四组中所表示的三角形三边都是有理数, 若要得到整边三角形, 只要在各组中三边同乘它们分母的最小公倍数即可.由④, ⑤, ⑥, ⑦分别得到四类整边三角形的三边的表达式:

第Ⅰ类 $$\begin{cases} a = 2st(x^2 + y^2) \\ b = (s^2 - t^2)(x^2 - y^2) + 4stxy \\ c = (s^2 + t^2)(x^2 - y^2) \end{cases}$$

第Ⅱ类 $$\begin{cases} a = (s^2 - t^2)(x^2 + y^2) \\ b = 2st(x^2 - y^2) + 2(s^2 - t^2)xy \\ c = (s^2 + t^2)(x^2 - y^2) \end{cases}$$

第III类　$\begin{cases} a = st(x^2 + y^2) \\ b = st(x^2 - y^2) + (s^2 - t^2)xy \\ c = xy(s^2 + t^2) \end{cases}$

第Ⅳ类　$\begin{cases} a = (s^2 - t^2)(x^2 + y^2) \\ b = (s^2 - t^2)(x^2 - y^2) + 4stxy \\ c = 2xy(s^2 + t^2) \end{cases}$

其中$x, y \in N^+, x > y$,　$(x, y) = 1, 2|xy$；$s, t \in N^+, s > t, (s, t) = 1$,　且 $2|st$.

现在验证第Ⅰ类三角形的面积为正整数：

由$cosA = \dfrac{p}{q}$，有 $sinA = \sqrt{1-(\dfrac{p}{q})^2} = \dfrac{\sqrt{q^2 - p^2}}{q} = \dfrac{m}{q}$，因为此时$m = 2st, q = s^2 + t^2$,　所以, $sinA = \dfrac{2st}{s^2 + t^2}$，于是，面积

$$S = \frac{1}{2}\, bc\, sinA = \frac{1}{2}\,[(s^2 - t^2)(x^2 - y^2) + 4stxy]\times(s^2 + t^2)(x^2 - y^2)\times\frac{2st}{s^2 + t^2}$$

$$= st(x^2 - y^2)\,[(s^2 - t^2)(x^2 - y^2) + 4stxy]$$

显然, s 是正整数. 因此，第一类三角形是 *Heron* 三角形. 仿此可验证其他三类三角形都是 *Heron* 三角形.

不排除处于不同类型中的两个三角形有全等的可能性，甚至同一类型中的两个三角形也有可能全等.

很显然第III类型中的三角形边长都是偶数.

如果在这四类三角形中，三边同时约去它们的最大公因数，得到的三角形就是本原 *Heron* 三角形.

如果 s, t 与 x, y 只取前 4 个正整数 1，2，3，4，根据 s, t 与 x, y 的限制，数对(s, t) 与数对(x, y)可任意对应于$(2, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 3)$中的一种取值，共有 16 组不同取法. 现任取其中 8 组不同取值，根据四个不同类型三角形三边的表达式，共得到 32 个三角形. 下面由列表形式给出其中 16 种，用以验证推导与猜测的正确性：

	第Ⅰ类	第Ⅱ类	第III类	第Ⅳ类
$\begin{cases} s = 2 \\ t = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} a = 100 \\ b = 117 \\ c = 35 \end{cases}$ $S = 1638.$ 本原 *Heron*△	$\begin{cases} a = 75 \\ b = 100 \\ c = 35 \end{cases}$ $S = 1050$	$\begin{cases} a = 50 \\ b = 50 \\ c = 60 \end{cases}$ $S = 1200$	$\begin{cases} a = 75 \\ b = 117 \\ c = 120 \end{cases}$ $S = 4212$

$\begin{cases} s=4 \\ t=1 \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} a=104 \\ b=171 \\ c=85 \end{cases}$ $S=3420$ 本原 *Heron*△	$\begin{cases} a=195 \\ b=220 \\ c=85 \end{cases}$ $S=8250$	$\begin{cases} a=52 \\ b=110 \\ c=102 \end{cases}$ $S=2640$	$\begin{cases} a=195 \\ b=171 \\ c=204 \end{cases}$ $S=5130$
$\begin{cases} s=3 \\ t=2 \end{cases}, \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} a=204 \\ b=171 \\ c=195 \end{cases}$ $S=15390$	$\begin{cases} a=85 \\ b=220 \\ c=195 \end{cases}$ $S=8250$	$\begin{cases} a=102 \\ b=110 \\ c=52 \end{cases}$ $S=2640$	$\begin{cases} a=85 \\ b=171 \\ c=104 \end{cases}$ $S=3420$ 本原 *Heron*△
$\begin{cases} s=2 \\ t=1 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} a=20 \\ b=25 \\ c=15 \end{cases}$ $S=150$	$\begin{cases} a=15 \\ b=24 \\ c=15 \end{cases}$ $S=108$	$\begin{cases} a=10 \\ b=12 \\ c=10 \end{cases}$ $S=48$	$\begin{cases} a=15 \\ b=25 \\ c=20 \end{cases}$ $S=150$
$\begin{cases} s=4 \\ t=3 \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} a=312 \\ b=323 \\ c=125 \end{cases}$ $S=19380$ 本原 *Heron*△	$\begin{cases} a=91 \\ b=204 \\ c=125 \end{cases}$ $S=3570$ 本原 *Heron*△	$\begin{cases} a=156 \\ b=102 \\ c=150 \end{cases}$ $S=7344$	$\begin{cases} a=91 \\ b=323 \\ c=300 \end{cases}$ $S=13566$ 本原 *Heron*△
$\begin{cases} s=4 \\ t=1 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} a=40 \\ b=77 \\ c=51 \end{cases}$ $S=924$ 本原 *Heron*△	$\begin{cases} a=75 \\ b=84 \\ c=51 \end{cases}$ $S=1890$	$\begin{cases} a=20 \\ b=42 \\ c=34 \end{cases}$ $S=336$	$\begin{cases} a=75 \\ b=77 \\ c=68 \end{cases}$ $S=2310$ 本原 *Heron*△
$\begin{cases} s=3 \\ t=2 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} a=60 \\ b=63 \\ c=39 \end{cases}$ $S=1134$	$\begin{cases} a=25 \\ b=56 \\ c=39 \end{cases}$ $S=420$ 本原 *Heron*△	$\begin{cases} a=30 \\ b=28 \\ c=26 \end{cases}$ $S=336$	$\begin{cases} a=25 \\ b=63 \\ c=52 \end{cases}$ $S=630$ 本原 *Heron*△
$\begin{cases} s=3 \\ t=2 \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} a=156 \\ b=169 \\ c=65 \end{cases}$ $S=5070$	$\begin{cases} a=65 \\ b=120 \\ c=65 \end{cases}$ $S=1500$	$\begin{cases} a=78 \\ b=60 \\ c=78 \end{cases}$ $S=2160$	$\begin{cases} a=65 \\ b=169 \\ c=156 \end{cases}$ $S=5070$

三．垂足三角形及其伴随三角形、切点三角形的研究

常见的三角形或者三角形中的特殊点、特殊线与 *Heron* 三角形之间的关系，已被早前的老师们研究的比较干净了．我只发现垂足三角形与切点三角形还可作点文章.为了研究的必要，

先给出如下定义：

以三角形三条高的垂足为顶点的三角形称为这个三角形的垂足三角形；

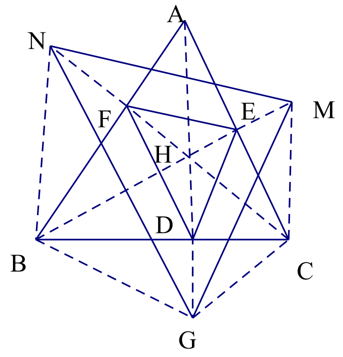
以垂心关于三边的对称点为顶点的三角形称为垂足三角形的伴随三角形；

以内切圆与三边的切点为顶点的三角形称为切点三角形.

探究 2. 存在锐角 *Heron* 三角形, 它的垂足三角形及其伴随三角形均为 *Heron* 三角形.

解：如图, $\triangle ABC$ 是锐角 *Heron* 三角形, $\triangle DEF$ 它的垂足三角形, $\triangle GMN$ 是$\triangle DEF$ 的伴随三角形.

在四边形 $AEHF$ 中，因为$\angle AFH=\angle AEH=\dfrac{\pi}{2}$，所以$\angle A+\angle EHF=\pi$，$\angle BHC=\angle EHF=\pi-\angle A$. 同理, $\angle CHA=\pi-\angle B$, $\angle AHB=\pi-C$.



因为, G, H 关于 BC 对称, 所以, $\angle BGC=\angle BHC=\pi-\angle A$ $\Rightarrow \angle A+\angle BGC=\pi$. 故四点 A, B, G, C 共圆, 即 G 在$\triangle ABC$的外接圆上. 同理, M, N 也在$\triangle ABC$ 的外接圆上.

因为 $BG=BH=BN$, 所以$\triangle GBN$ 是等腰三角形, 且$\angle GBN=\angle GBH+\angle HBN=2(\angle HBF+\angle HBD)=2\angle B$ $\Rightarrow \angle BGN=\dfrac{\pi-2B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\angle B$. 仿此有, $\angle CGM=\dfrac{\pi}{2}-\angle C$, 从而, $\angle MGN=\angle BGC-\angle BGN-\angle BGN=(\pi-\angle A)-(\dfrac{\pi}{2}-\angle B)-(\dfrac{\pi}{2}-\angle C)=\pi-2\angle A$.

同理, $\angle GNM=\pi-2\angle C$, $\angle NMG=\pi-2\angle B$.

因为 $HG=2HD$, $HM=2HE$, $HN=2HF$, 所以$\triangle GMN\backsim\triangle DEF$, 相似比为 2. $\triangle ABC$ 与$\triangle GMN$ 有相同的外接圆, 因而$\triangle GMN$ 的外接圆半径亦为 R.

从而, $GM=2R\sin\angle GNM=2R\sin(\pi-2\angle C)=2R\sin 2C$.

同理, $NM=2R\sin 2A$, $GN=2R\sin 2B$, 所以, $DE=R\sin 2C$, $EF=R\sin 2A$, $FD=R\sin 2B$.

$\triangle DEF$的面积$S_{\triangle DEF}=\dfrac{1}{2}DE\times DF\sin\angle EDF=\dfrac{1}{2}\times R\sin 2C\times R\sin 2B\times\sin(\pi-2A)$

$=\dfrac{1}{2}R^2\sin 2A\sin 2B\sin 2C=4R^2\sin A\sin B\sin C\cos A\cos B\cos C=\dfrac{abc}{2R}\cos A\cos B\cos C$

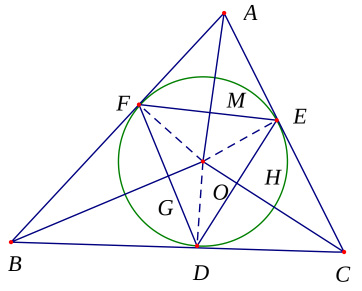
$=2S\cos A\cos B\cos C$

$\triangle GMN$的面积$S_{\triangle GMN}=8S\cos A\cos B\cos C$.

在 *Heron*$\triangle ABC$ 中, S, $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$, $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, R 均为有理数, 所以, $\triangle DEF$ 的三边及面积均为有理数, 同理, $\triangle GMN$ 的三边及面积也是有理数, 因此, 若将 *Heron*$\triangle ABC$ 相似放大, 会使$\triangle DEF$ 的三边及面积、$\triangle GMN$ 的三边及面积

均为正整数.即存在锐角 *Heron* 三角形，它的垂足三角形及其伴随三角形均为 *Heron* 三角形.

探究 3.存在 *Heron*$\triangle ABC$，以 O 为内心，当 OA, OB, OC 均为有理数时，切点$\triangle DEF$ 亦为 *Heron* 三角形.



解：如图. 连 OE, OF，在四边形 $AEOF$ 中，易知 $OA\perp EF$，且 OA 平分 EF.

在 $Rt\triangle EMO$ 中，$ME = r\sin\angle EOA = r\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}) = r\cos\frac{A}{2} \Rightarrow MF = 2r\cos\frac{A}{2}$. 因 $AE = p-a$ 为有理数，OA 也为有理数 $\Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \frac{p-a}{OA}$ 为有理数，又 r 为有理数 $\Rightarrow MF = 2r\cos\frac{A}{2}$ 为有理数. 同理，FD, DE 为有理数.

$S_{\triangle EOF} = \frac{1}{2}r^2\sin\angle EOF = \frac{1}{2}r^2\sin(\pi-A) = \frac{1}{2}r^2\sin A$. 同理，$S_{\triangle DOF} = \frac{1}{2}r^2\sin B$, $S_{\triangle DOE} = \frac{1}{2}r^2\sin C$. $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2}r^2(\sin A+\sin B+\sin C)$. 因 r, $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ 均为有理数，所以，$S_{\triangle DEF}$ 为有理数.如果将$\triangle ABC$相似放大，有理$\triangle DEF$可放大为本原*Heron*三角形.

四. 倍角 Heron 三角形的研究及通式的推导

在奥校时，我曾做过 1991 年美国第 20 届数学奥林匹克竞赛题：在$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 2\angle B$，$\angle C$ 是钝角，三条边长 a, b, c 都是整数，求周长的最小值. 现改编如下：

探究 4. 在本原 *Heron*$\triangle ABC$ 中，若 $\angle A = 2\angle B$，求周长和面积的最小值.

解：　由正弦定理与余弦定理有，

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin 2B}{\sin B} = 2\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{ca}$$

$\Rightarrow a^2c-a^2b-bc^2+b^3 = 0 \Rightarrow (c-b)(a^2-bc-b^2) = 0 \Rightarrow c = b$，或者 $a^2-bc-b^2 = 0$.

若 $c = b$，则 $\angle B = \angle C$，由 $\angle A+\angle B+\angle C = \pi \Rightarrow 4\angle B = \pi \Rightarrow \angle B = \frac{\pi}{4}$，易知$\triangle ABC$为等腰直角三解形，$\angle A = \frac{\pi}{2}$.这时，$a = \sqrt{2}\,b$，因 $b\in N^+$，知 a 为无理数，矛盾.

所以，$a^2-bc-b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b(b+c)$ ……①

若 $(b, c) = d > 1$，则由①知 $d\mid a$，与题设矛盾. 故 $(b, c) = 1$，进而 $(b, b+c) = 1$.

由①式知，b 与 $b+c$ 都是完全平方数，可设 $b^2 = m^2$, $b+c = n^2$, $m, n\in N^+$. 这时，$a = mn$,

$$\Rightarrow \begin{cases} a = mn \\ b = m \\ c = n^2 - m \end{cases}, (m, n) = 1.$$

若$b > c$. 由$a > b$, 知$a > c \Rightarrow mn > n^2 - m \Rightarrow m(n+1) > n^2 \Rightarrow m \geq n$

由$b + c > a \Rightarrow n^2 > mn \Rightarrow n > m$, 矛盾. 所以, $b < c$.

此时如果 $a > c$ 依前述推导矛盾. 因此, 只有 $b < a < c$.

由$a < c \Rightarrow mn < n^2 - m \Rightarrow m(n+1) < n^2, m \leq n-1$.

由$a + b > c \Rightarrow mn + m > n^2 - m \Rightarrow m(n+2) > n^2 \Rightarrow m \geq n-1$.

所以, $m = n-1$, 由 $b = n-1 \geq 3 \Rightarrow b \geq 4$, 于是有

$$\begin{cases} a = n^2 - n \\ b = n - 1 \\ c = n^2 - n + 1 \end{cases}, \text{其中} n \geq 4, n \in N^+.$$

因为本原 *Heron* 三角形三边为两奇一偶, 故 n 为偶数.从 a, b, c 的表达式易知, 随着 n 的增大, a, b, c 同时增大. 因此, 当 n 最小时, 周长与面积同时最小.

经检验, n 的最小值为 10, 可算得周长最小为 190, 面积最小值为 380.

承接探究 4, 定义倍数的 *Heron* 三角形：其中一个内角是另一个内角的倍数的 *Heron* 三角形叫倍角 *Heron* 三角形. 下面推导倍角 *Heron* 三角形三边的通式：

探究 5. 在本原 *Heron*$\triangle ABC$ 中, 若$\angle A = n\angle B$, 求三边 a, b, c 的通式:

解: 由正弦定理有

$$\frac{a}{\sin nB} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin[\pi - (n+1)B]} = 2R, \text{ 则}$$

$$\begin{cases} a = 2R\sin nB \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin(n+1)B \end{cases}$$

利用棣莫佛定理, 不难求得

$$\sin nB = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k C_n^{2k+1} (\cos B)^{n-2k-1} (\sin B)^{2k+1}$$

$$\sin(n+1)B = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_{n+1}^{2k+1} (\cos B)^{n-2k} (\sin B)^{2k+1}$$

于是, 有

$$a:b:c = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k C_n^{2k+1} (\cos B)^{n-2k-1} (\sin B)^{2k} : 1 : \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_{n+1}^{2k+1} (\cos B)^{n-2k} (\sin B)^{2k}$$

令 $\tan\frac{B}{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in N^+$, 且$(p, q) = 1$. 则$\cos B = \frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}$, $\sin B = \frac{2qp}{q^2 + p^2}$

$$\Rightarrow \quad a：b：c=[\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k C_n^{2k+1}\left(\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2}\right)^{n-2k-1}\left(\frac{2qp}{q^2+p^2}\right)^{2k}]：1$$

$$：[\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_{n+1}^{2k+1}\left(\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2}\right)^{n-2k}\left(\frac{2qp}{q^2+p^2}\right)^{2k}]$$

于是，得到三边 a, b, c 的通式:

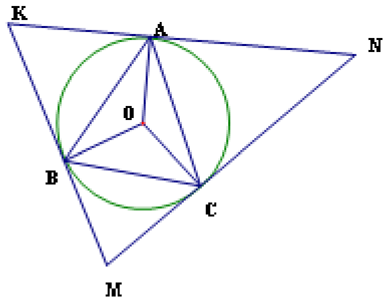
$$\begin{cases} a=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(-1)^k C_n^{2k+1}(2qp)^{2k}(q^2+p^2)(q^2-p^2)^{n-2k-1} \\ b=(q^2+p^2)^n \\ c=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k C_{n+1}^{2k+1}(2qp)^{2k}(q^2-p^2)^{n-2k} \end{cases}$$

五、有理角平分线的Heron三角形与完全平方三角形问题（PSTP）的联系

Heron 三角形的研究中存在一些长期未能解决的问题，比如中线问题(是否存在三条中线都是有理数的 *Heron* 三角形)，完全平方三角形问题(即 *PSTP* 问题：是否存在三条边都是完全平方数且角平分线都是有理数的三角形)等．类比于中线问题，是否存在角平分线都为有理数的 *Heron* 三角形？如果存在，是有限个还是无限个？能否找出所有角平分线为有理数的 *Heron* 三角形？这样的研究是有有助于(*PSTP*)的研究吗?

探究 6. 设 (a,b,c) 为一组锐角三角形的本原 *Heron* 数组，则由公式

$$\begin{cases} m=a^2(b^2+c^2-a^2) \\ n=b^2(a^2+c^2-b^2) \\ k=c^2(a^2+b^2-c^2) \end{cases}$$



给出的数组 (m,n,k) 是一组 *Heron* 数组且相应的 *Heron* 三角形的三条角平分线都是有理数.

证明：设 ΔABC 是三边分别为 *Heron* 数组 (a,b,c) 的本原 *Heron* 三角形，由假设条件知：ΔABC 是锐角三角形，因此 ΔABC 的外接圆的圆心 O 在 ΔABC 的内部．作 ΔABC 的外接圆 O；过 A,B,C 分别作圆的三条切线，这三条切线必两两相交构成 ΔMNK（如图 1 所示）注意到

$\angle BOC=2\angle BAC, \tan A=\tan\angle BAC\in Q$，

设 $r=OA=OB=OC$ 为圆的半径，故 $r\in Q$，从而 $MC=r\tan A\in Q$.同理 $NC\in Q$，这样，$MN=MC+CN\in Q$. 同理 $MK\in Q, NK\in Q$，所以三角形 MNK 各边都是有理数.

又 $\angle NMK=2(\frac{\pi}{2}-\angle BAC)=\pi-2A$，所以 $\sin\angle NMK=\sin 2A=2\sin A\cos A\in Q$.

同理，$\angle MKN=\pi-2C, \angle MNK=\pi-2B,\ \sin\angle MKN, \sin\angle MNK\in Q$.

又在 ΔMNK 中 $\cos\angle NMK=-\cos 2A=\sin^2 A-\cos^2 A\in Q$，同理 $\cos K, \cos N\in Q$.

因此 ΔMNK 的面积 $S_{\Delta MNK}=\frac{1}{2}MN\times MK\times\sin\angle NMK\in Q$.

对 ΔMNK 的 $\angle NMK$ 的角平分线 d_M，我们有：

$$\frac{d_M}{\sin N}=\frac{MN}{\sin(K+M/2)}=\frac{MN}{\sin(K+(\pi/2-A))}=\frac{MN}{\cos(K-A)},$$

又 $\cos(K-A)=\cos K\cos A+\sin K\sin A\in Q$，从而 $\angle NMK$ 的角平分线 d_M 为有理数.

同理 ΔMNK 的另两条角平分线也为有理数.

综上可得，ΔMNK 的边长、面积和三条角平分线都是有理数,

再把 ΔMNK 放缩有理数倍便可以得到一个边长为本原 *Heron* 数组，而面积为整数，角平分线为有理数的本原 *Heron* 三角形.下面证明公式组成立：

由于，$MC=r\tan A, NC=r\tan B, \sin A=\frac{a}{2r}, \sin B=\frac{b}{2r}$，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

$$\text{因此}, MN=r(\tan A+\tan B)=\frac{abc}{b^2+c^2-a^2}+\frac{abc}{a^2+c^2-b^2}=\frac{2abc^3}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}.$$

$$\text{同理}, MK=\frac{2ab^3c}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)},\quad KN=\frac{2a^3bc}{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}.$$

由 MN, MK, KN 约去一个公共的有理数便得：

$$\begin{cases} m=a^2(b^2+c^2-a^2) \\ n=b^2(a^2+c^2-b^2) \\ k=c^2(a^2+b^2-c^2) \end{cases}$$

探究 7：设 (a,b,c) 为一组钝角三角形的本原 *Heron* 数组，即满足 $c^2>a^2+b^2$，则由公式

$$\begin{cases} m = a^2(b^2+c^2-a^2) \\ n = b^2(a^2+c^2-b^2) \\ k = c^2(c^2-a^2-b^2) \end{cases}$$

给出的数组(m,n,k)是一组 *Heron* 数组且相应的 *Heron* 三角形的三条角平分线都是有理数.

仿探究 6 的推导, 不难推导出探究 7 的结论也是成立的.

探究 6, 探究 7 根据锐角或钝角本原 *Heron* 三角形构造出了角平分线为有理数的 *Heron* 三角形. 如果逆向思维, 我们又会得到什么结论呢?

探究 8 ：如果数组(m,n,k)是一组 *Heron* 数组且相应的 *Heron* 三角形ΔMNK的三条角平分线都是有理数，那么数组(m,n,k)可以表示为：

$$\begin{cases} m = \lambda a^2(b^2+c^2-a^2) \\ n = \lambda b^2(a^2+c^2-b^2) \\ k = \lambda c^2(a^2+b^2-c^2) \end{cases}, \qquad (8.1)$$

其中$\lambda \in Q$，(a,b,c)为一组锐角三角形的本原 *Heron* 数组.或者

$$\begin{cases} m = \lambda a^2(b^2+c^2-a^2) \\ n = \lambda b^2(a^2+c^2-b^2) \\ k = \lambda c^2(c^2-a^2-b^2) \end{cases}, \qquad (8.2)$$

其中$\lambda \in Q$，(a,b,c)为一组钝角三角形的本原 *Heron* 数组且$c^2 > a^2 + b^2$.

证明：如果数组(m,n,k)是一组 *Heron* 数组且相应的 *Heron* 三角形ΔMNK的三条角平分线都是有理数， 则ΔMNK必有内切圆 O.设圆 O 与ΔMNK的三个切点分别为A,B,C，当三角形 ABC 为锐角三角形，由定理探究 6 的推导，我们有：

$$\angle NMK = 2(\frac{\pi}{2} - \angle BAC) = \pi - 2A，\angle MKN = \pi - 2C, \angle MNK = \pi - 2B.$$

再由假设条件和预备知识 6，我们有：$\sin A, \sin B, \sin C \in Q, r \in Q$，从而$BC, AC, AB \in Q$且$S_{\Delta ABC} \in Q$.再通过放缩三角形 ABC,可使其成为本原 *Heron* 三角形,记其三边分别为 a, b, c, 当三角形 ABC 为锐角三角形，由探究 6，数组(m,n,k)可以表示为：

$$\begin{cases} m = \lambda a^2(b^2+c^2-a^2) \\ n = \lambda b^2(a^2+c^2-b^2) \\ k = \lambda c^2(a^2+b^2-c^2) \end{cases},$$

其中$\lambda \in Q$，(a,b,c)为一组锐角三角形的本原 *Heron* 数组.当三角形 ABC 为钝角三角形，

由探究 7 同样可得（8.2）式的证明.

由定理探究 6 与探究 7, 可知，利用一个 *Heron* 三角形(不论是锐角三角形，钝角三角形)，我们都可以构造出一个角平分线都为有理数的 *Heron* 三角形，而探究 8 又告诉我们，这类角平分线都为有理数的 *Heron* 三角形都可表为形如(8.1)或(8.2)式.

探究 9： 设 (a,b,c) 为本原 *Heron* 数组，如果相似于三边分别为 $a^2(b^2+c^2-a^2)$、$b^2(a^2+c^2-b^2)$、$c^2(a^2+b^2-c^2)$ 的本原 *Heron* 三角形的三条边都是平方数，则存在正整数 x,y,z 满足

$$\begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ x^2+z^2=b^2 \\ y^2+z^2=a^2 \end{cases}$$

且 $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$ 为平方数. 反之，如果存在正整数 x,y,z 满足上述条件，则相似于三边分别为 $a^2(b^2+c^2-a^2)$、$b^2(a^2+c^2-b^2)$、$c^2(a^2+b^2-c^2)$ 的本原 *Heron* 三角形的三条边都是平方数且角平分线均为有理数.

证明：由于 (a,b,c) 为本原 *Heron* 数组，故 a,b,c 中恰有一个偶数和两个奇数且 $(a,b,c)=1$. 由对称性，我们不妨设 b,c 为奇数，a 为偶数.

设相似于三边分别为 $a^2(b^2+c^2-a^2)$、$b^2(a^2+c^2-b^2)$、$c^2(a^2+b^2-c^2)$ 的本原 *Heron* 三角形的三条边都是平方数，则必有正整数 λ,u,v,w 满足：

$$\begin{cases} a^2(b^2+c^2-a^2)=\lambda u^2 \\ b^2(a^2+c^2-b^2)=\lambda v^2 \\ c^2(a^2+b^2-c^2)=\lambda w^2 \end{cases} \qquad (9.1)$$

其中 λ 中没有平方因子，从而必有整数 x,y,z 使得

$$\begin{cases} b^2+c^2-a^2=\lambda x^2 \\ a^2+c^2-b^2=\lambda y^2 \\ a^2+b^2-c^2=\lambda z^2 \end{cases}. \quad 即 \begin{cases} 2c^2=\lambda(x^2+y^2) \\ 2b^2=\lambda(x^2+z^2) \\ 2a^2=\lambda(y^2+z^2) \end{cases}.$$

由于 $(a,b,c)=1$，故 $\lambda\,|\,2$.比较（9.1）式的奇偶性，我们有 $\lambda=2$. 于是

$$\begin{cases} b^2+c^2-a^2=2x^2 \\ a^2+c^2-b^2=2y^2 \\ a^2+b^2-c^2=2z^2 \end{cases}. \quad 即 \begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ x^2+z^2=b^2 \\ y^2+z^2=a^2 \end{cases}.$$

由于三边分别为$a^2(b^2+c^2-a^2)$、$b^2(a^2+c^2-b^2)$、$c^2(a^2+b^2-c^2)$的三角形为 *Heron* 三角形，对此三角形我们有，半周长$p=2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$，面积$S=4x^2y^2z^2\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$.从而$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$为平方数.

反之，如果存在正整数x,y,z满足$\begin{cases}x^2+y^2=c^2\\x^2+z^2=b^2\\y^2+z^2=a^2\end{cases}$

且$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$为平方数.容易验证三边分别为a^2x^2、b^2y^2、c^2z^2的三角形为 *Heron* 三角形，三条边都是平方数且角平分线均为有理数.故定理成立.

探究 10：设(a,b,c)为本原 *Heron* 数组且满足$c^2>a^2+b^2$，若相似于三边分别为$a^2(b^2+c^2-a^2)$、$b^2(a^2+c^2-b^2)$、$c^2(c^2-a^2-b^2)$的本原 *Heron* 三角形的三条边都是平方数，则存在正整数x,y,z满足

$$\begin{cases}x^2+y^2=c^2\\x^2-z^2=b^2\\y^2-z^2=a^2\end{cases}$$

且$x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2$为平方数. 反之，如果存在正整数x,y,z满足上述条件，则相似于三边分别为$a^2(b^2+c^2-a^2)$、$b^2(a^2+c^2-b^2)$、$c^2(c^2-a^2-b^2)$的本原 *Heron* 三角形的三条边都是平方数且角平分线均为有理数.

由探究 9 与探究 10 可知，*PSTP* 问题解的存在，完全等同于探究 9 或者探究 10 中四个不定方程构成的方程组的解的存在. 因此，我们为最终解决 *PSTP* 问题提供了新的分析角度和处理方法

六. 本原 *Heron* 三角形的元素组成等差数列的研究

探究 11. 已知本原 *Heron*$\triangle ABC$,　三边长 a, b, c 成等差数列, 且 $a>b>c$, 现判断下列问题的正确性：

(1) a, b, c 与 S 能组成等差数列吗？

(2) r, c, a 能组成等差数列吗？

(3) c, a, S 能组成等差数列吗？

(4) h, b, S 能组成等差数列吗？

解： 先证 h, r 都是正整数.

因本原海伦三角形三边为两奇一偶，故设$a = 2n + k$, $b = 2n$, $c = 2n—k$($0< k < n$, $n, k \in N^+$, 且k为奇数), $p = 3n$.

$$S = \sqrt{3n(n—k)n(n + k)} = n\sqrt{3(n^2—k^2)}$$

因为S为正整数，所以$\sqrt{3(n^2—k^2)}$ 为正整数，可设$n^2－k^2 = 3m^2$, $m \in N^+$.

b边上的高$h = \dfrac{2S}{b} = \dfrac{2n\sqrt{3(n^2—k^2)}}{2n} = \sqrt{3(n^2—k^2)} = 3m \in N^+$.

由 $S = rp \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{3(n^2—k^2)}}{3} = \dfrac{\sqrt{3\times 3m^2}}{3} = m$, 故 r 为正整数.

(1)因 $S = \dfrac{1}{2}r(a + b + c) > ra > a$. 可能组成的等差数列是 c, b, a, S.

$$S—a = k \Rightarrow n\sqrt{3(n^2—k^2)} = 2n + 2k \quad \Rightarrow \quad 3n^2(n—k)(n + k) = 4(n + k)^2$$

$\Rightarrow \quad 3n^2(n—k)= 4(n + k) \Rightarrow 3n^3—4n = (3n^2 + 4)k$ ……①

$\Rightarrow \quad 3n^2 + 4 \mid 3n^3—4n$

因为 $3n^3—4n = n(3n^2 + 4) —8n$, 所以 $3n^2 + 4 \mid 8n$, 当$n \ge 3$ 时, $3n^2 + 4 > 8n$.

只有 $n = 2$ 时, $16 \mid 16$. 再由①解得 $k = 1$. 此时，三角形三边为 3, 4, 5，面积 $S = 6$.

此时, c, b, a, S 可组成等差数列.

(2) 若 r, c, a 可组成等差数列，则 $c—r = 2k$.

$$2n—3k = \frac{\sqrt{3(n^2—k^2)}}{3}, \Rightarrow 3(2n—3k)^2 = n^2—k^2, \Rightarrow \quad 11n^2 = 36nk—28k^2$$

$\Rightarrow \quad 2 \mid 11n^2$, 因为$(2, 11) = 1$，所以, $2 \mid n^2 \Rightarrow 2 \mid n$. 设$n = 2q$, $q \in N^+$, 则有

$$11\times 4q^2 = 36\times 2qk—28k^2 \Rightarrow 11q^2 —18qk + 7k^2 = 0$$

$$(11q—7k)(q—k) = 0 \Rightarrow k = q \text{ 或者 } k = \frac{11}{7}q.$$

若 $k = q$, 则 $n = 2q = 2k$, $\Rightarrow a = 5k$, $c = 3k$, $r = k$. 此时, r, c, a 可组成等差数列.

若$k = \dfrac{11}{7}q$, 再令 $q = 7u$, $u \in N^+$. 则$k = 11u$, $n = 14u$, $\Rightarrow a = 39u$, $c = 17u$, $r = 5u$.

显然, $a—c \ne c—r$. 此时, r, c, a 不能组成等差数列.

综上所述，当 a, c, r 分别取 $5k, 3k, k$ 时，可组成等差数列.

(3) 若 c, a, S 能组成等差数列，则 $2a = c + S$, $\Rightarrow 2(2n + k) = (2n－k) + n\sqrt{3(n^2—k^2)}$

$\Rightarrow 2n + 3k = n\sqrt{3(n^2—k^2)}$ ……②

根据前述, $n^2－k^2 = 3m^2$, $m \in N^+$. $\Rightarrow (n—k)(n + k) = 3m\times m$

令 $\dfrac{n-k}{m}=\dfrac{3m}{n+k}=\dfrac{p}{q}$，其中 p, q 均为正整数，$(p, q)=1$.

$$\Rightarrow\begin{cases} n-k=\dfrac{mp}{q} \\ n+k=\dfrac{3mq}{p} \end{cases} \Rightarrow\begin{cases} n=\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{3q}{p}+\dfrac{p}{q}\right) \\ k=\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{3q}{p}-\dfrac{p}{q}\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow\quad n：k=(3q^2+p^2)：(3q^2-p^2)$，

设 $\begin{cases} n=(3q^2+p^2)\lambda \\ k=(3q^2-p^2)\lambda \end{cases}$，其中 $\lambda\in N^+$.

代入②式，有 $15q^2-p^2=6pq(3q^2+p^2)\lambda$，$\Rightarrow q[15q-6p(3q^2+p^2)\lambda]=p^2$

$\Rightarrow\quad q\,|\,p^2$ ……③

因为 $(p, q)=1\Rightarrow(p^2, q)=1$，故③式不成立，于是产生矛盾. 所以，$c, a, S$ 不能组成等差数列.

(4) 如果 h, b, S 能组成等差数列，则 $2b=h+S$. 有

$$\sqrt{3(n^2-k^2)}+n\sqrt{3(n^2-k^2)}=(n+1)\sqrt{3(n^2-k^2)}=4n\Rightarrow 3(n+1)^2(n^2-k^2)=16n^2$$

设 (n_0, k_0) 是不定方程的一组正整数解，则有

$$3(n_0+1)^2(n_0^2-k_0^2)=16n_0^2 \quad\text{……④}$$

由④式知，$3\,|\,16n_0^2$，而 $(3, 16)=1$，故 $3\,|\,n_0^2$，又 3 是素数，所以，$3\,|\,n_0$. 令 $n_0=3n_1$，

于是，有 $3(3n_1+1)^2(9n_1^2-k_0^2)=16\times9n_1^2$

$\Rightarrow(3n_1+1)^2(9n_1^2-k_0^2)=16\times3n_1^2$ ……⑤

$\Rightarrow 3\,|\,(3n_1+1)^2(9n_1^2-k_0^2)$，$\Rightarrow 3\,|\,(3n_1+1)^2k_0^2$，而 $(3, 3n_1+1)=1$，

故 $3\,|\,k_0^2$，又 3 是素数，所以，$3\,|\,k_0$. 令 $k_0=3k_1$，于是⑤式可化为

$(3n_1+1)^2(9n_1^2-9k_1^2)=16\times3n_1^2$，$\Rightarrow 3(3n_1+1)^2(n_1^2-k_1^2)=16n_1^2$ ……⑥

$\Rightarrow 3\,|\,16n_1^2$，因 $(3, 16)=1$，故 $3\,|\,n_1^2$，又因 3 是素数，所以 $3\,|\,n_1$，令 $n_1=3n_2$，于是，⑥式化为 $3(9n_2+1)^2(9n_2^2-k_1^2)=16\times9n_2^2$

$\Rightarrow\quad(9n_2+1)^2(9n_2^2-k_1^2)=16\times3n_2^2$ ……⑦

$\Rightarrow\quad 3\,|\,(9n_2+1)^2(9n_2^2-k_1^2)\Rightarrow 3\,|\,(9n_2+1)^2k_1^2$，而 $(3, 9n_2+1)=1$，

故 $3\,|\,k_1^2$，又 3 是素数，所以，$3\,|\,k_1$. 令 $k_1=3k_2$，于是⑦式可化为

$(9n_2+1)^2(9n_2^2-9k_2^2)=16\times3n_2^2$，$\Rightarrow 3(9n_2+1)^2(n_2^2-k_2^2)=16n_2^2$.

如此继续下去，$3\,|\,n_0, 3\,|\,k_0\Rightarrow 3^2\,|\,n_0, 3^2\,|\,k_0\Rightarrow$ ……$\Rightarrow 3^d\,|\,n_0, 3^d\,|\,k_0\Rightarrow$ ……

其中 $d\in N^+$. 由无穷递降法可知，$n_0=0, k_0=0$，这与 n_0, k_0 是正整数矛盾. 故不定方程

$3(n+1)^2(n^2 - k^2) = 16n^2$无解. 所以, h, b, S不能组成等差数列.

七. 研究的延伸

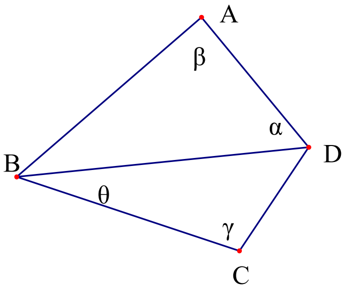
从三角形到多边形, 从平面图形到空间图形, 这是研究的一种自然延伸.为了研究的需要, 先给出下面的定义:

1.各边为正整数, 面积也是正整数的多边形称为 *Heron* 多边形.

2.各棱为正整数, 各面为正整数, 体积也为正整数的的多面体称为 *Heron* 多面体.

探究 12. 如果两个 *heron* 三角形有一条边长相等, 依靠这条相等的边, 很容易拼接成一个 *heron* 四边形. 怎样构造出 *heron* 四边形四边的通式?

假设如图就是两个 *heron*△*ABD*, △*BCD* 拼接起来的 *heron* 四边形 *ABCD*.



在△*ABD* 中, 由正弦定理有,

$$\frac{BD}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin(\alpha+\beta)},$$

如果令 $\tan\frac{\alpha}{2} = s$, $\tan\frac{\beta}{2} = t$, s 与 t 都是有理数. 则

$$\frac{BD}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{AB}{\frac{2s}{1+s^2}} = \frac{AD}{\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-s^2}{1+s^2} + \frac{2s}{1+s^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$\frac{BD}{2t(1+s^2)} = \frac{AB}{2s(1+t^2)} = \frac{AD}{2t(1-s^2)+2s(1-t^2)} \cdots\cdots①$$

在△*ACD* 中, 由正弦定理有,

$$\frac{BD}{\sin\gamma} = \frac{CD}{\sin\theta} = \frac{CB}{\sin(\gamma+\theta)}$$

如果令 $\tan\frac{\gamma}{2} = p$, $\tan\frac{\theta}{2} = q$, p 与 q 都是有理数. 则

$$\Rightarrow \frac{BD}{2p(1+q^2)} = \frac{CD}{2q(1+p^2)} = \frac{BC}{2p(1-q^2)+2q(1-p^2)} \cdots\cdots②$$

由①有, $$\frac{BD}{tp(1+s^2)(1+q^2)} = \frac{AB}{sp(1+t^2)(1+q^2)} = \frac{AD}{p(1+q^2)[t(1-s^2)+s(1-t^2)]}$$

由②有, $$\frac{BD}{tp(1+s^2)(1+q^2)} = \frac{CD}{tq(1+s^2)(1+p^2)} = \frac{BC}{t(1+s^2)[p(1-q^2)+q(1-p^2)]}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{sp(1+t^2)(1+q^2)} = \frac{BC}{t(1+s^2)[p(1-q^2)+q(1-p^2)]} = \frac{CD}{tq(1+s^2)(1+p^2)}$$

$$= \frac{AD}{p(1+q^2)[t(1-s^2)+s(1-t^2)]} \cdots\cdots③$$

存在正整数 K,使 *heron* 四边形 *ABCD* 的四边可表示为

$$\begin{cases} AB = Ksp(1+t^2)(1+q^2) \\ BC = Kt(1+s^2)[p(1-q^2)+q(1-p^2)] \\ CD = Ktq(1+s^2)(1+p^2) \\ AD = Kp(1+q^2)[t(1-s^2)+s(1-t^2)] \end{cases}$$

其中 s,t,p,q 均为有理数.

若四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形，则$\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \dfrac{\beta}{2}=\pi-\dfrac{\gamma}{2} \Rightarrow p=\dfrac{1}{t}$，代入③式中，化简得

$$\frac{AB}{\frac{s}{t}(1+t^2)(1+q^2)}=\frac{BC}{t(1+s^2)[\frac{1}{t}(1-q^2)+q(1-\frac{1}{t^2})]}$$

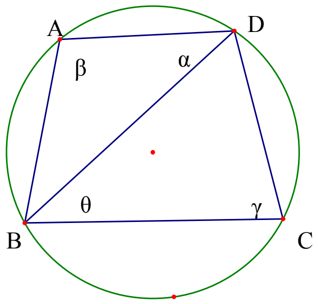
$$=\frac{CD}{tq(1+s^2)(1+\frac{1}{t^2})}=\frac{AD}{\frac{1}{t}(1+q^2)[t(1-s^2)+s(1-t^2)]}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{s(1+t^2)(1+q^2)}=\frac{BC}{(1+s^2)[t(1-q^2)+q(t^2-1)]}$$

$$=\frac{CD}{q(1+s^2)(t^2+1)}=\frac{AD}{(1+q^2)[t(1-s^2)+s(1-t^2)]}$$

存在正整数 M,使圆内接 *heron* 四边形 $ABCD$ 的四边可表示为

$$\begin{cases} AB = Ms(1+t^2)(1+q^2) \\ BC = M(1+s^2)[t(1-q^2)+q(t^2-1)] \\ CD = Mq(1+s^2)(t^2+1) \\ AD = M(1+q^2)[t(1-s^2)+s(1-t^2)] \end{cases} \quad \cdots\cdots④$$



其中 s,t,q 均为有理数.

等腰梯形一定是一个圆内接四边形，

若 *heron* 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，则$\alpha=\theta \Rightarrow s=q$. 此时，

存在正整数 N，使等腰梯形 $ABCD$ 的四边可表示为：

$$\begin{cases} AB = Ns(1+t^2) \\ BC = N[t(1-s^2)+s(t^2-1)] \\ CD = Ns(t^2+1) \\ AD = N[t(1-s^2)+s(1-t^2)] \end{cases} \quad \cdots\cdots⑤$$

其中 s,t 均为有理数.

如果令 $s=\dfrac{u}{v}$, $t=\dfrac{l}{f}$, $u, v, l, f \in N^+$, $u<v$, $f<l$, $(u,v)=1$, $(l,f)=1$. 取$N=v^2f^2 \in N^+$，则⑤式化为：

$$\begin{cases} AB = uv(f^2+l^2) \\ BC = lf(v^2-u^2)+uv(l^2-f^2) \\ CD = uv(f^2+l^2) \\ AD = lf(v^2-u^2)+uv(f^2-l^2) \end{cases} \quad \cdots\cdots⑥$$

此时，根据⑥式，可以讨论等腰梯形的面积.

高$h^2 = AB^2 - \left(\dfrac{BC-AD}{2}\right)^2 = [uv(f^2+l^2)]^2 - [uv(l^2 - f^2)]^2, \Rightarrow h^2 = (2uvlf)^2$

$\Rightarrow h = 2uvlf \in N^+, AD + BC = 2lf(v^2 - u^2)$

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC)h = 2l^2f^2uv(v^2 - u^2) \in N^+.$$

从上述推导过程也可以看出, *heron* 等腰梯形的上下底边奇偶性相同, 高为正整数.

研究 13：是否存在每个面都是本原勾股三角形的四面体.

四个面都是勾股三角形的四面体只有一种情况.如图所示.

$PK\perp$平面MNK, $PM\perp MN$, 因为KM是PM在平面MNK上的射影, 所以$KM\perp MN$. 因为$S_{\triangle MNK}$是 6 的倍数, 知四面体的体积是正整数.

如果存在每个面都是本原勾股三角形的四面体, 依图有

$$\begin{cases} a^2+b^2=l^2 \\ l^2+c^2=d^2 \\ b^2+c^2=f^2 \\ a^2+f^2=d^2 \\ a^2+b^2+c^2=d^2 \end{cases}$$

显然, a, c 为偶数, b, l, f, d 为奇数.

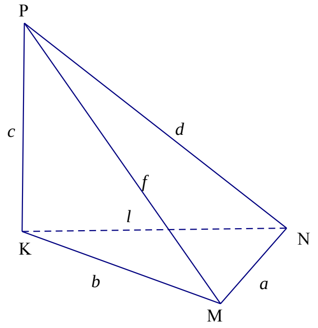
由$a^2+b^2=l^2$, 令$a=2st, b=s^2-t^2, l=s^2+t^2, (s,t)=1. s>t, s, t\in N^+$, 且 $2|st$.

由$l^2+c^2=d^2$, 令$c=2xy, l=x^2-y^2, d=x^2+y^2, (x,y)=1. x>y, x, y\in N^+$, 且 $2|xy$.

由$b^2+c^2=f^2$, 令$c=2pq, b=p^2-q^2, f=p^2+q^2, (p,q)=1. p>q, p, q\in N^+$,且 $2|pq$.

由$a^2+f^2=d^2$, 令$a=2mn, f=m^2-n^2, d=m^2+n^2, (m,n)=1. m>n, m, n\in N^+$, $2|mn$.

综上比较, 得



$$\begin{cases} st=mn & (1) \\ pq=xy & (2) \\ s^2-t^2=p^2-q^2 & (3) \\ s^2+t^2=x^2-y^2 & (4) \\ p^2+q^2=m^2-n^2 & (5) \\ m^2+n^2=x^2+y^2 & (6) \end{cases}$$

由方程$(1)\Rightarrow s|mn$, 因$(m,n)=1$及对称性, 不妨设$s|m$. 令$m=s_1s, s_1\in N^+\Rightarrow t=s_1n$, 此时, $(s,n)=1, (m,t)=s_1$.

同样, 由方程$(2)\Rightarrow p|xy$, 因$(x,y)=1$及对称性, 不妨设$p|x$. 令$x=p_1p, p_1\in N^+\Rightarrow q=p_1y$, 此时, $(p,y)=1, (x,q)=p_1$.

于是, 不定方程组中的(3), (4), (5), (6)四个方程可化为

$$\begin{cases} s^2-(s_1n)^2=p^2-(p_1y)^2 & (7) \\ s^2+(s_1n)^2=(p_1p)^2-y^2 & (8) \\ p^2+(p_1y)^2=(s_1s)^2-n^2 & (9) \\ (s_1s)^2+n^2=(p_1p)^2+y^2 & (10) \end{cases}$$

由(7), (8)两不定方程，有 $2s^2 = (1 + p_1^2)(p^2 - y^2)$　　(11)

由(9), (10)两不定方程，有 $2n^2 = (1 + p_1^2)(p^2 + y^2)$　　(12)

因为 $(p, y) = 1$，由(11), (12) 有 $(2s^2, 2n^2) = 1 + p_1^2 \Rightarrow 1 + p_1^2 = 2(s^2, n^2)$

又 $(s, n) = 1 \Rightarrow (s^2, n^2) = 1 \Rightarrow 1 + p_1^2 = 2 \Rightarrow p_1 = 1$. 此时, $x = p, y = q$. 则由不定方程 (3), (4)有

$$\begin{cases} s^2 - t^2 = p^2 - q^2 \\ s^2 + t^2 = p^2 - q^2 \end{cases} \Rightarrow t = 0,\ 这与\ t \in N^+ 矛盾.$$

故不存在每个面都是本原勾股三角形的四面体.

如果将四面体补形，容易得到一个长方体. 这个长方体与完全长方体有关联.《数论中未解决的问题》(中文版第二版)第 221 页介绍了完全长方体后, *Martin Gardner* 问是否存在棱长、面对角线长、体对角线长均为正整数（或有理数）的完全长方体. 这个问题是数论中一个长期悬而未决的问题. 我在此研究的其实是：相邻三棱长两两互质的完全长方体是不存在的!如果能够解决相邻三棱长中有两条不互质的完全长方体也不存在，则整个完全长方体问题将得到解决!

参考文献

[1]朱道勋. 海伦三角形的若干性质. 中学数学(湖北), 1994,10.

[2]边欣,李忠民.有关本原海伦三角形的几个新结论.数学通讯,1995,10.

[3]孙延照,鞠锡田.一些特殊的 *Heron* 三角形的共同之处.数学通讯,1998,2.

[4]曾丕刚.内切圆半径为整数的海伦三角形.数学通讯,1996,4.

[5]姚勇.周长是面积 *k* 倍的海伦三角形.数学通讯,1996,2.

[6]马统一，会宁人.等差海伦数组的公式. 中学数学(苏州), 1996.5.

[7]*Ronald*. *J*. *Evans*. *Problem E*2685[*j*]．*Amer*．*Math*．*Monthly*．1977,(84)：820.

[8]边欣.一类本原 *Evans* 三角形.高等数学研究, 2007,1.

[9] 梁幼鸣,李小纯.关于 *Evans* 问题若干研究结论.武汉科技大学学报,2000,4.

[10] 杨世明．诺尔曼——埃尔德什定理的一个初等证明．中学数学 2004，3，48-49．

[11] *R. Guy*, *Unsolved Probelms in Number Theory 3rd ed.*, *Springer*, *Springer-Verlag*, 2004.

[12] *Ralph H. Buchholz*，*On Triangles with rational altitudes,angle bisectors or medians* ，*November* 1989 (*PhD Thesis*, *University of Newcastle*).

[13] *F. Luca. Perfect Cuboids and Perfect Square Triangles. Math. Mag.* 73(2000), 400–401.

其它相关链接：

http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_brick

http://mathworld.wolfram.com/EulerBrick.html

http://mathworld.wolfram.com/PerfectCuboid.html

http://www.users.globalnet.co.uk/~perry/maths/perfectcuboid/perfectcuboid.htm